Equação do 2º grau e fatoração

Objetos de conhecimento	Habilidades
• Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis. • Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações.	• (EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.
Objetivos	
• Resolver equações polinomiais do 2º grau. • Utilizar diferentes métodos de resolução de equações do 2º grau. • Identificar e compreender equações do 2º grau e dialogar sobre o significado das raízes em confronto com situações-problema. • Explorar diferentes procedimentos para determinar as raízes de equações do 2º grau.	
Recursos utilizados	
• Tabelas com expressões ou equações fracionárias. • Lousa.	• Caderno. • Lápis grafite. • Giz.

Quantidade estimada de aulas

- 3 aulas de aproximadamente 50 minutos cada.

Desenvolvimento da sequência didática

1ª etapa (1 aula: em média 50 minutos)

Nesta primeira etapa será trabalhada com os alunos conceitos de expressões algébricas e suas resoluções, pelo método da fatoração. Para isso apresente na lousa alguns exemplos de expressões algébricas. Por exemplo:

$$\begin{aligned}(6x - 1)^2 &= (6x - 1) \cdot (6x - 1) \\ &= 36x^2 - 12x - 12x + 4 \\ &= 36x^2 - 24x + 4\end{aligned}$$

Atividade 1

Inicie a aula reproduzindo na lousa as expressões algébricas apresentadas anteriormente, realizando o passo a passo das resoluções. Promova um momento de diálogo sobre equações, partindo para a contextualização histórica a respeito de como surgiram as equações. Comente em especial sobre a equação do 2º grau, passando necessariamente pela figura do indiano Bhaskara, sua origem e seus conhecimentos. É comum no Brasil dar o nome de Bhaskara à fórmula de resolução de uma equação do 2º grau. No entanto, na literatura internacional esse nome não é adotado, pois a nomenclatura *fórmula de Bhaskara* não é a mais adequada. Discuta se teria sido ele o responsável pela criação da regra que permite resolver as equações do 2º grau. Se julgar conveniente, sugira aos alunos que pesquisem um pouco mais sobre o assunto.

Pergunte também a respeito dos métodos de resolução, relacionando com a fatoração. Dessa maneira, questione os alunos sobre o que é trinômio, trinômio quadrado perfeito, produto notável, fatoração e fator comum, colocando diferentes exemplos e sistematizações na lousa à medida que os alunos forem mencionando suas respostas. Caso apresentem dificuldades, e a partir delas, verifique os equívocos dos alunos e, assim, realize as intervenções que julgar necessárias. Neste momento proponha alguns questionamentos, como o apresentado a seguir.

- Qual a utilidade do trinômio quadrado perfeito quando estudamos a equação do 2º grau?

Espera-se que os alunos respondam que com a fatoração, por exemplo, da expressão $25x^2 - 10x + 1$ (trinômio quadrado perfeito) obtém-se $(5x - 1)^2$. Igualando a zero, temos $25x^2 - 10x + 1 = 0$ (equação do 2º grau).

Na sequência, escreva na lousa algumas expressões para que eles resolvam individualmente. Durante o desenvolvimento da atividade, observe se há alunos utilizando o método da fatoração ou se tal método pode emergir mediante uma conversa de alguma resolução deles.

Após a correção, promova um momento de discussão sobre equações.

2ª etapa (2 aulas: em média 100 minutos)

Para compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, reproduza na lousa o exemplo $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a + 2ab + b^2$ (trinômio quadrado perfeito).

Uma vez desenvolvida a operação, solicite aos alunos que igualem a zero, obtendo a equação polinomial do 2º grau $a^2 + 2ab + b^2 = 0$. Nesse caso, os coeficientes das variáveis **a** e **b** são iguais a 1.

Antes de realizar a resolução da equação por meio da fórmula resolutiva, sugira outros exemplos de equações polinomiais na lousa, como:

$$2 \cdot (6x+1)^2 = 0$$
$$2 \cdot (\,36x^2 + 12x + 1) = 0$$
$$72x^2 + 24x + 2 = 0$$

Assim, os valores dos coeficientes são $a = 72$, $b = 24$ e $c = 2$.

Na sequência, apresente na lousa uma resolução utilizando a fatoração, por exemplo:

$$\boldsymbol{x^2 - 8x + 16 = 9} \text{ para } \boldsymbol{x = 7} \text{ e } \boldsymbol{x = 1}$$

Inicialmente realize a substituição dos valores, $x = 7$:

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 16 &= 9 \\ 7^2 - 8 \cdot 7 + 16 &= 9 \\ 49 - 56 + 16 &= 9 \\ -7 + 16 &= 9 \\ 9 &= 9 \ (sentença\ verdadeira) \end{aligned}$$

Em seguida para $x = 1$:

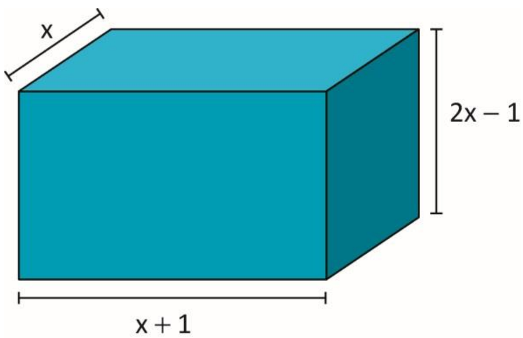
$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 16 &= 9 \\ 1^2 - 8.1 + 16 &= 9 \\ 1 - 8 + 16 &= 9 \\ -7 + 16 &= 9 \\ 9 &= 9 \ (sentença\ verdadeira) \end{aligned}$$

Percebe-se que ao substituir os valores $x = 7$ e $x = 1$ na equação $x^2 - 8x + 16 = 9$, as igualdades obtidas, em ambos os casos, são verdadeiras $(9 = 9)$. Portanto, os valores 7 e 1 são raízes da equação.

Organize os alunos em grupos e reproduza na lousa o problema a seguir, procurando orientá-los no sentido de iniciarem o diálogo entre os integrantes do grupo para que consigam identificar as informações e compreender corretamente a questão presente no problema, e então elaborar uma estratégia para a resolução.

1. Considere um bloco retangular com as medidas das arestas, dadas em metros, iguais a $(x + 1)$, x, $(2x - 1)$, conforme a imagem a seguir. Determine o volume, em metros cúbicos, desse bloco.

Ilustração: Maryane Vioto Silva



Dados do problema: x , $(x + 1)$ e $(2x - 1)$ são as arestas do cubo.

A medida do volume de um bloco retangular é determinada pelo produto entre as medidas de seu comprimento, largura e altura. Portanto:

$$\begin{aligned} V &= (x + 1) \cdot x \cdot (2x - 1) \\ V &= (x^2 + x) \cdot (2x - 1) \\ V &= 2x^3 - x^2 + 2x^2 - x \\ V &= 2x^3 + x^2 - x \end{aligned}$$

Explique aos alunos que, nesse caso, a solução é representada por uma expressão polinomial. Caso seja fornecido um valor a x, será possível determinar o volume desse bloco retangular.

Atividade 1

1. Lizandra possui um terreno em formato de quadrado cuja medida da área é igual a 400 m^2. Qual é a medida, em metros, do lado desse terreno?

Medida da área do quadrado: 400 m^2
Medida do lado do terreno (x):

$$A = x \cdot x$$
$$x^2 = 400$$

Logo, $x = \pm\sqrt{400}$. Assim $x = \{-20;\ +20\}$. Como trata-se de uma medida de comprimento, desconsideramos o resultado negativo.
A medida do lado do terreno de Lizandra é 20 m.

2. Considere a equação $10x^2 - 1\,000 = 0$. Calcule suas raízes.

$$10x^2 - 1\,000 = 0$$
$$10x^2 = 1\,000$$
$$x^2 = \frac{1\,000}{10}$$
$$x^2 = 100$$
$$x = \pm\sqrt{100}$$
$$x = \pm 10$$

Conjunto solução: $S = \{-10;\ +10\}$. As raízes, portanto, são $x = -10$ e $x = +10$.

3. A equação $4x^2 + 20 = 0$ não possui solução no conjunto dos números reais. Por que isso ocorre?

Resolvendo a equação:

$$4x^2 + 20 = 0$$
$$4x^2 = -20$$
$$x^2 = \frac{-20}{4}$$
$$x^2 = -5$$
$$x = \pm\sqrt{-5}$$

Não há solução no conjunto dos números reais, porque não existe raiz quadrada de número negativo.

Lembrando de que, se o valor da raiz é substituído na equação inicial, verifica-se uma igualdade. Proponha aos alunos que façam essa substituição nas situações propostas para comprovar se a sentença matemática está correta ou não.

Avaliação

As questões abaixo vão auxiliá-lo na avaliação do desenvolvimento das habilidades trabalhadas nesta sequência pelos alunos. Você pode reproduzi-las na lousa ou fazer as perguntas aos alunos oralmente.

1. Resolva a equação $16y^2 - 1 = 0$ no conjunto dos números reais.

$$16y^2 - 1 = 0$$
$$16y^2 = 1$$
$$y^2 = \frac{1}{16}$$
$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{16}}$$
$$y = \pm\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{16}}$$
$$y = \pm\frac{1}{4}$$

Resposta: A solução da equação $16x^2 - 1 = 0$ no conjunto dos números reais é $S = \left\{-\frac{1}{4};\ +\frac{1}{4}\right\}$.

2. Considere um pedaço de madeira em formato retangular cujas dimensões são $(x + 1)$ cm e $(x - 1)$ cm. Sabendo que a medida da área desse pedaço de madeira é 143 cm², calcule as medidas dos seus lados.

A medida da área do retângulo é dada pela multiplicação das medidas dos seus lados. Logo:

$$\mathrm{A} = (x + 1) \cdot (x - 1)$$
$$\mathrm{A} = x^2 - x + x - 1$$
$$\mathrm{A} = x^2 - 1$$
$$143 = x^2 - 1$$
$$x^2 - 1 = 143$$
$$x^2 = 144$$
$$x = \pm\sqrt{144}$$
$$x = \pm 12$$

Como o contexto envolve a medida do comprimento de um objeto, desconsideramos o resultado negativo. Substituindo o valor de x por 12 nas expressões $x + 9$ e $x - 1$, tem-se que as medidas dos lados do pedaço de madeira são iguais a 12 cm e 12 cm.

Seguem algumas questões que podem ser reproduzidas na lousa para auxiliar o aluno no processo de autoavaliação.

Autoavaliação	Sim	Não
Aprendi como encontrar as raízes de uma equação do 2º grau?		
Consegui calcular os valores das raízes utilizando a fatoração nas expressões algébricas?		
Consegui participar da resolução dos problemas apresentados?		